12. Решение ант. игры с выпуклыми и вогн. ф-ями выигрыша.

$F(x,y)$ вогн. по x и по y (отдельно)

$F(x,y)$ выпукл. по x и по y (лекции).

По зелёной книге более сложные игры:

$F(x,y)$ $\cap_x$ по y поведение любое

$F(x,y)$ $\cup_y$ по по x поведение любое

используется теорема Хелли о пересечении выпуклых компактов и т.д. более сложное изложение

Примеры.

1. $F(x,y) = x^2 - 4xy - y^2 + 3y$ $\quad X=[0,1]$, $Y=[0,1]$.

$F \cup_x \cap_y$. Здесь сущ. либо с.т. либо оптимальносмешанные стратегии вида

$$\varphi^0 = p_1^0 I_0 + (1 - p_1^0) I_1, \quad \psi^0 = q_1^0 I_0 + (1 - q_1^0) I_1.$$

Общий метод решения. Рассмотрим матр. игру

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & F(0,0) & F(0,1) \\ 1 & F(1,0) & F(1,1) \end{array} \qquad (F(x,y))_{x=0,1;\, y=0,1}$$

$$p^0, q^0 \Rightarrow \varphi^0, \psi^0.$$

$$F(x,y) = x^2 - 4xy - y^2 + 3y \quad X = [0,1], \; Y = [0,1].$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ p_1^0 & 0 & 0 & 2 \\ 1-p_1^0 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$1 - p_1^0 = 2p_1^0 - (1 - p_1^0) = v$$

$$p_1^0 = \frac{1}{2}, \quad v = \frac{1}{2}.$$

$$2(1 - q_1^0) = v = \frac{1}{2} \qquad q_1^0 = \frac{3}{4} \qquad \varphi^0 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1, \; \psi^0 = \frac{3}{4} I_0 + \frac{1}{4} I_1,$$

Докажем, что (φ^0, ψ^0, v) – решение в смеш. стр

$$F(\varphi^{\circ}, y) = \frac{1}{2} F(0, y) + \frac{1}{2} F(1, y) = \frac{1}{2}(-y^2 + 3y) + \frac{1}{2}(1 - y - y^2) =$$

$$F(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 + 3y \qquad = -y^2 + y + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} = v$$

$\forall\, y \in [0, 1].$

$$F(x, \psi^{\circ}) = \frac{3}{4} F(x, 0) + \frac{1}{4} F(x, 1) =$$

$$= \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 2) = x^2 - x + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} = v$$

итак, $F(\varphi^{\circ}, y) \geqslant v \geqslant F(x, \psi^{\circ}) \quad \forall x \in X \;\; \forall y \in Y \quad (*)$ ч.т.д.

|| Решите этот пример для

$$F(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 + 3y$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{array}$$

седл. точка

$(x^{\circ}, y^{\circ}) = (1, 0)$

$F(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 3y \qquad X = [0,1] \quad Y = [0,1]$

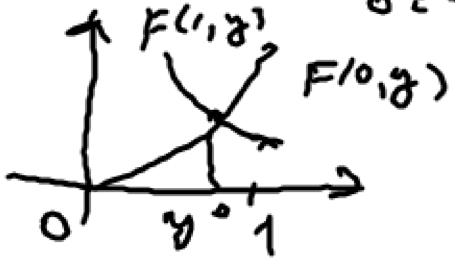
$F \quad \cup_x \quad \cup_y$. Метод из лекций.

$$v = \bar{v} = \min_{0 \le y \le 1} \max_{0 \le x \le 1} F(x,y) = \max_{0 \le x \le 1} F(x, y^0)$$

y^0 — минимаксная стр. оптимальная.

$\varphi^0 = p_1^0 I_0 + (1-p_1^0) I_1$ — опт. смешанная

$$\bar{v} = \min_{0 \le y \le 1} \max [F(0,y), F(1,y)] = \min_{0 \le y \le 1} \max [y^2 + 3y, 1 - y + y^2] = \frac{13}{16}.$$



$y^0 = \frac{1}{4}$. Найдём p_1^0.

$F(\varphi^0, y) \geq v \quad \forall y \in [0,1]$.

$$F(\varphi^0, y) = p_1^0 F(0,y) + (1-p_1^0) F(1,y) = p_1^0 (y^2 + 3y) + (1-p_1^0)(1 - y + y^2) =$$

$$= y^2 + p_1^0 3y + (1-p_1^0)(1-y)$$ дост. мин при $y^0 = \frac{1}{4}$

$F'_y(\varphi^0, y^0) = 0 \qquad 2y^0 + 3p_1^0 - (1-p_1^0) = 0$

$\frac{1}{2} + 4p_1^0 - 1 = 0 \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{8}$.

Проверка.

$F(\varphi^0, y) = \frac{1}{8} F(0,y) + \frac{7}{8} F(1,y) =$

$= \frac{1}{8}(y^2 + 3y) + \frac{7}{8}(1 - y + y^2) = y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{7}{8} \geq \frac{13}{16} = v$

$y^0 = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{8} =$

$= \frac{1}{16} + \frac{12}{16} = \frac{13}{16}$.

Решите эту игру

при $X = [0,2]$, $Y = [0,2]$.

Пусть $F(x,y) = -x^2 + 4xy - y^2 - 3y \qquad X = [0,1]$, $Y = [0,1]$

Здесь $F \cup_x \sim y \qquad v = \underline{v}$, x^0 – максиминная оптимальная

$\varphi^0 = q_1^0 I_0 + (1 - q_1^0) I_1$